

Pracownia Problemów Numerycznych Symulacja Układu Słonecznego

Michał Makaś

numer indeksu: 501735

Cel projektu: wykonanie symulacji Układu Słonecznego oraz eksperymentalne ustalenie minimalnej prędkości jaką należy nadać pociskowi na Ziemi, aby opuścił on Układ Słoneczny.

Opis projektu:

Symulacja Układu Słonecznego wymaga ustalenia jednostek opisu oraz warunków początkowych układu (położeń i prędkości planet), a następnie obliczania nowych położeń planet w kolejnych chwilach czasu.

Przyjęte jednostki:

- jednostka odległości: au — Jednostka Astronomiczna, $1\text{ au} = 149\,597\,870\text{ km}$,
- jednostka masy: MZ — Masa Ziemi, $\text{MZ} = 6 \cdot 10^{24}\text{ kg}$,
- jednostka czasu: rok — $y = 31\,536\,000\text{ s}$.

Dla powyższych jednostek ustalono wielkość Stałej Grawitacyjnej $G = 1,18404 \cdot 10^{-4} \frac{\text{au}^3}{\text{MZ} \cdot y^2}$. Warunki początkowe (położenia oraz prędkości planet) ustalono na podstawie informacji dostępny na stronie internetowej Solar System Dynamics Jet Propulsion Laboratory Caltech (<https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>). Kolejne położenia planet wyznaczano rozwiązując różniczkowe równania ruchu Newtona.

Jako pocisk przyjęto obiekt o masie 6 kg. Został on umieszczony około 9cm nad powierzchnią Ziemi. Chcąc wystrzelić pocisk poza Układ Słoneczny należy uwzględnić kierunek ruchu obiegowego Ziemi wokół Słońca. Wystrzelenie pocisku zgodnie z tym kierunkiem pozwoli na wykorzystanie prędkości liniowej Ziemi jako składowej prędkości pocisku.

Rozwiązywanie równań Newtona

Do rozwiązywania różniczkowych równań ruchu wykorzystano algorytmy Verleta oraz Eulera. Oba algorytmy do wyznaczenia położenia w chwili kolejnej posługują się położeniami i prędkościami w chwili obecnej. Lecz metoda Verleta wymaga dodatkowo znajomości położenia w chwili poprzedniej — zysk polega na wzroście dokładności obliczeń. Stąd w pierwszym kroku wykorzystano metodę Eulera.

Algorytm Eulera

Z definicji pochodnej:

$$\dot{v}(t_0) \approx \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = a(t_0)$$

zatem prędkość w chwili kolejnej dana jest wzorem,

$$v(t_0 + \Delta t) \approx a(t_0) \cdot \Delta t + v(t_0)$$

W podobny sposób:

$$\dot{r}(t_0) \approx \frac{r(t_0 + \Delta t) - r(t_0)}{\Delta t} = v(t_0)$$

a więc położenie w chwili kolejnej obliczyć można na podstawie wzoru:

$$r(t_0 + \Delta t) \approx v(t_0) \cdot \Delta t + r(t_0)$$

Algorytm Verleta

Wzory pozwalające wykonywać obliczenia przy użyciu algorytmu Verleta otrzymano na podstawie rozwinięcia w szereg Taylora, ograniczonego do trzeciej pochodnej. Położenie w chwili kolejnej:

$$x(t_0 + \Delta t) \approx x(t_0) + \frac{\dot{x}(t_0)}{1!} \cdot \Delta t + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!} \cdot \Delta t^2 + \frac{\dddot{x}(t_0)}{3!} \cdot \Delta t^3$$

Aby wyeliminować trzecią pochodną z obliczeń wykorzystano wzór na położenie w chwili poprzedniej, a następnie dodano oba wzory stronami:

$$x(t_0 - \Delta t) \approx x(t_0) - \frac{\dot{x}(t_0)}{1!} \cdot \Delta t + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!} \cdot \Delta t^2 - \frac{\dddot{x}(t_0)}{3!} \cdot \Delta t^3$$

Po dodaniu:

$$x(t_0 + \Delta t) \approx -x(t_0 - \Delta t) + 2 \cdot x(t_0) + \ddot{x}(t_0) \cdot \Delta t^2$$

Wnioski: Przeprowadzony eksperyment pozwolił na ustalenie prędkości jaką należy nadać pociskowi, aby opuścił on Układ Słoneczny. Wynosi ona około 42 km/s.